E.N.S. TEXTILES DE ROUBAIX 1976

Concours 2ème année

MATHEMATIQUES (4 h)

1er Problème

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} a & -a & b \\ -a & a & -b \\ b & -b & 2a-b \end{pmatrix}$

où a et b sont deux paramètres réels.

1° Calculer son déterminant, det M - La matrice M est-elle inversible ?

2° Calculer les valeurs propres de M et en déduire ses vecteurs propres. Montrer que l'on peut, à l'aide d'un changement de base, mettre M sous forme diagonale.

3° Montrer qu'il existe deux constantes α et β telles que

$M^3 = \alpha M^2 + \beta M$.

Calculer α et β

4° Pour

$a = \frac{1}{6}$ $b = \frac{2}{3}$ on a $M^3 = M$

On considère alors la matrice $S_n(t)$

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{t^k}{k!} M^k$$

Montrer que $S_n(t)$ peut s'écrire $S_n(t) = f_n(t)\, M^2 + g_n(t)\, M$

où $f_n(t)$ et $g_n(t)$ sont deux polynômes en t que l'on explicitera.

Montrer que $f_n(t)$ et $g_n(t)$ tendent, quand $n \longrightarrow \infty$, vers des limites $f(t)$ et $g(t)$ que l'on calculera.

On posera alors $S(t) = f(t)\, M^2 + g(t)\, M$.

Soit V un vecteur propre de M. Calculer $S(t)V$. En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de $S(t)$.

.../...

2e Problème

Soit n un entier $\geqslant 0$

1° Soit l'intégrale $A_n = \int_0^1 (\text{Log } x)^n \, dx$

a) Montrer que c'est une intégrale absolument convergente.

b) Trouver une relation entre A_{n+1} et A_n

c) En déduire la valeur de A_n

2° Soit les intégrales

$$I_n = \int_0^1 \frac{(\text{Log}x)^n}{(1+x)^2} \, dx \; ; \; J_n = \int_1^{+\infty} \frac{(\text{Log}x)^n}{(1+x)^2} \, dx \; ; \; K_n = \int_0^{+\infty} \frac{(\text{Log}x)^n}{(1+x)^2} \, dx$$

a) Montrer que ces intégrales sont absolument convergentes.

b) En effectuant dans I_n, le changement de variable $u = \frac{1}{x}$

trouver une relation simple entre I_n et J_n, puis entre K_n et I_n.

3° a) Démontrer l'inégalité $\frac{n!}{4} \leqslant |I_n| \leqslant n!$

b) En déduire le rayon de convergence de la série entière de la variable t, qui a pour terme général

$$K_n \frac{t^n}{n!}$$

4° Soit x un nombre réel > 0

a) Développer en série entière de la variable réelle t, où $|t| < 1$ la fonction $t \longrightarrow \frac{x^t}{(1+x)^2}$

b) En admettant, sans démonstration, que l'on puisse intégrer par rapport à la variable x, entre 0 et $+\infty$, terme à terme, la série obtenue, exprimer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{(1+x)^2} \, dx$$ sous forme de série entière de la variable réelle t.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail